ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 1

დავალება № 8. მატრიცები და დეტერმინანტები

ქვემოთმოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 8-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

2 – ა,ბ,დ	2 – გ, ე	3 – ბ,დ	3 – ა,დ	4	5 – ა	5 – ბ	6 – ა,ბ	6 – გ,დ	7	8	9	10	11 -ა
11 -ბ	12	13	14 – ა,ბ,დ	14 – გ,ე	15 -ა	15 -ბ	16 – ა,ბ	17 -ა	17 -ბ	18 –ა	18 – ბ	19	

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

2. ჩაწერეთ $B=\left(b_{ij}\right)_{3\times2}$ მატრიცა, რომლის ზოგადი ელემენტია

ა) $b_{ij}=5$, $i=1,2,3;\ j=1,2.$

ამოხსნა.

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$

ბ) $b_{ij}=i$, $i=1,2,3;\ j=1,2.$

ამოხსნა.

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$

დ) $b_{ij} = \min(i, j)$, $i = 1,2,3;\ j = 1,2.$

ამოხსნა.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. მოცემულია მატრიცები: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

ბ) იპოვეთ $A - 3B$

ამოხსნა.

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 9 & -12 \\ 0 & 36 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -10 & 15 \\ 4 & -31 & -6 \end{pmatrix}$$

პასუხი. $\begin{pmatrix} -21 & -10 & 15 \\ 4 & -31 & -6 \end{pmatrix}$.

დ) იპოვეთ $2B^T + 3C$

ამოხსნა.

$$2B^T + 3C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \end{pmatrix}^T + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 12 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 6 & 24 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -24 \\ 6 & 6 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -24 \\ 12 & 30 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix} 17 & -24 \\ 12 & 30 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

5. იპოვეთ a, b, c, თუ

ა) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-2 & 6c \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა. თუ გავუტოლებთ ტოლი მატრიცების შესაბამის ელემენტებს, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} 5 = b - 2 \\ 2 = 6c \\ 3 = 3 \\ a = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 7 \\ c = \dfrac{1}{3} \\ a = 7 \end{matrix}$$

პასუხი. $a = 7$, $b = 7$, $c = \frac{1}{3}$.

6. იპოვეთ მატრიცათა ნამრავლი

ა) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+1\cdot 1 & 2\cdot 4+1\cdot 2 \\ -1\cdot(-3)+0\cdot 1 & -1\cdot 4+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

პასუხი. $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

ბ) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0-2\cdot(-6) & 1\cdot 5-2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 \end{pmatrix}$.

პასუხი. $\begin{pmatrix} 12 & 1 \end{pmatrix}$.

7. მოცემულია $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ და $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ მატრიცები. ამ მატრიცებისთვის შეამოწმეთ $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$ ტოლობის მართებულობა.

შემოწმება. $(A\cdot B)\cdot C = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0+3\cdot 3 & 2\cdot 1+3\cdot 4 \\ 1\cdot 0+4\cdot 3 & 1\cdot 1+4\cdot 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\cdot 3+14\cdot 1 & 9\cdot 2+14\cdot 5 \\ 12\cdot 3+17\cdot 1 & 12\cdot 2+17\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 88 \\ 53 & 109 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\cdot 3+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot 5 \\ 3\cdot 3+4\cdot 1 & 3\cdot 2+4\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 13 & 2\cdot 5+3\cdot 26 \\ 1\cdot 1+4\cdot 13 & 1\cdot 5+4\cdot 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 88 \\ 53 & 109 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

(1) და (2) გამოსახულებების შედარება გვაძლევს, რომ $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$. რ.დ.გ.

10. A, B და C მატრიცებისთვის შეამოწმეთ $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ ტოლობის სამართლიანობა, თუ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

შემოწმება. $A\cdot(B+C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 2+1\cdot 4 & 0\cdot 6+1\cdot 0 & 0\cdot 6+1\cdot 8 \\ -5\cdot 2+3\cdot 4 & -5\cdot 6+3\cdot 0 & -5\cdot 6+3\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & -30 & -6 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$A\cdot B + A\cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 14 & -10 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -12 & -20 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & -30 & -6 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

აქ მატრიცათა მიღებული გამრავლებები დაწვრილებით არ მოგვიყვანია, როგორც (1) ტოლობაში. პირდაპირ დავწერეთ შედეგი.

(1) და (2) ტოლობების შედარება ადასტურებს, რომ სამართლიანია ტოლობა:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C.$$

11. იპოვეთ მატრიცების ნამრავლი

ა) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ამოხსნა. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot1 & 2\cdot1 & 1\cdot1 \\ 4\cdot1 & 1\cdot1 & 2\cdot1 \\ 5\cdot1 & 3\cdot1 & 5\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ე. ი. მატრიცის ნამრავლი ერთეულოვან მატრიცზე გვაძლევს იგივე მატრიცს, თუ მათი განზომილებები ისეთია, რომ მატრიცთა გამრავლების წესი დაცულია.

პასუხი. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

12. საპრეზიდენტო არჩევნებში მონაწილეობს სამი კანდიდატი. წინასაარჩევნო კომპანიისათვის თითოეული კანდიდატი იყენებს პლაკატებს, სარეკლამო რგოლებსა და საინფორმაციო ბუკლეტებს. I კანდიდატი უკვეთავს 10000 პლაკატს, 2 სთ სარეკლამო ეთერს, 20000 ბუკლეტს; II კანდიდატი – 12000 პლაკატს, 1,5 სთ სარეკლამო ეთერს, 24000 ბუკლეტს, ხოლო III – 16000 პლაკატს, 1,5 სთ სარეკლამო ეთერს და 15000 ბუკლეტს. 1 ცალი პლაკატის ღირებულებაა 3 ლარი, 1 წთ სარეკლამო ეთერის – 100 ლარი, ხოლო 1 ცალი ბუკლეტის 1.5 ლარი. რა თანხაა საჭირო თითოეული კანდიდატის კამპანიის ჩასატარებლად? (ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენეთ მატრიცული სიმბოლიკა.

ამოხსნა. შემოვიღოთ $Q = \begin{pmatrix} 10000 & 120 & 20000 \\ 12000 & 90 & 24000 \\ 16000 & 90 & 15000 \end{pmatrix}_{3\times3}$ და $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 100 \\ 1.5 \end{pmatrix}_{3\times1}$ მატრიცები, სადაც

Q არის არჩევნებისათვის თითოეული კანდიდატის მიერ გამოყენებული ატრიბუტების მატრიცა, ხოლო

P - ფასების მატრიცა. მაშინ დანახარჯების C მატრიცა გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$C = Q \cdot P = \begin{pmatrix} 10000 & 120 & 20000 \\ 12000 & 90 & 24000 \\ 16000 & 90 & 15000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 100 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000\cdot3+120\cdot100+20000\cdot1.5 \\ 12000\cdot3+90\cdot100+24000\cdot1.5 \\ 16000\cdot3+90\cdot100+15000\cdot1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72000 \\ 81000 \\ 79500 \end{pmatrix}.$$

პასუხი: I კანდიდატი – 72000 ლარი,
II კანდიდატი – 81000 ლარი,
III კანდიდატი – 79500 ლარი.

14. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

ა) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$.

ამოხსნა. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot5 - 3\cdot(-4) = 10 + 12 = 22$.

პასუხი. 22.

ბ) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$

ამოხსნა. $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

პასუხი. 1.

დ) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

ამოხსნა. $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot(-2)\cdot 3 = -42$.

პასუხი. -42.

15. გამოთვალეთ შემდეგი დეტერმინანტები როგორც სარუსის, ისე სამკუთხედის წესით.

ა) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

ამოხსნა სარუსის წესით

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot1 + 0\cdot3\cdot3 + (-1)\cdot2\cdot4 - 3\cdot5\cdot(-1) - 4\cdot3\cdot1 - 1\cdot2\cdot0 = 5-8+15-12 = 0.$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{matrix}$$

პასუხი. 0.

ამოხსნა სამკუთხედის წესით

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot1 + 2\cdot4\cdot(-1) + 0\cdot3\cdot3 - 3\cdot5\cdot(-1) - 0\cdot2\cdot1 - 3\cdot4\cdot1 = 5-8+15-12 = 0.$$

პასუხი. 0.

17. მოცემულია დეტერმინანტი $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. გამოიყენეთ სტრიქონებისა და სვეტების მიხედვით დეტერმინანტის გაშლის წესი და მოცემული დეტერმინანტი გამოთვალეთ შემდეგი ხერხით.

ა) გაშალეთ პირველი სტრიქონის მიხედვით.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში დეტერმინანტის გაშლას ექნება შემდეგი სახე:

$$\Delta = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}.$$

თუ გავითვალისწინებთ A_{ij} ალგებრული დამატების განმარტებას, მივიღებთ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(0-20) - 2\cdot(0+4) + 1\cdot(-10+3) = -20-8-7 = -35.$$

პასუხი. -35.

18. ამოხსენით განტოლება $\begin{vmatrix} x+6 & 4 \\ x & 7 \end{vmatrix} = 0$.

ამოხსნა. $\begin{vmatrix} x+6 & 4 \\ x & 7 \end{vmatrix} = 7\cdot(x+6) - 4x = 7x + 42 - 4x = 3x + 42$. ე. ი. გვაქვს განტოლება

$$3x + 42 = 0$$
$$3x = -42$$
$$x = -14.$$

პასუხი. -14.